



Министерство образования и науки Самарской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Самарской области
«САМАРСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
(ГБПОУ «СЭК»)

Л.Г. Будников

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Методические указания к выполнению самостоятельной работы
для студентов
специальности 13.02.01 Тепловые электрические станции

Самара 2017

Методические указания к выполнению самостоятельной работы по дисциплине *Математическое моделирование в энергетических системах* для студентов специальности 13.02.01/ авт. Будников Л.Г. – Самара: ГБПОУ «СЭК», 2017 – 11 с.

Издание содержит методические указания к выполнению самостоятельной работы по дисциплине *Математическое моделирование в энергетических системах*. Составлено в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальности 13.02.01.

Рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим советом ГБПОУ «СЭК» (протокол № 1 от 28.09.2017 г.)

Рецензент:

Яшин В.В. – заместитель директора - главного инженера по эксплуатации
Безымянской ТЭЦ

Замечания, предложения и пожелания направлять в ГБПОУ «СЭК» по адресу: 443001, г. Самара, ул. Самарская 205-А или по электронной почте info@sam-ek.ru

© ГБПОУ «СЭК», 2017

Пояснительная записка

Уважаемый студент!

Цель методических рекомендаций - оказание помощи в выполнении самостоятельной работы, закрепление теоретических знаний, полученных в результате изучения дисциплины *Математическое моделирование в энергетических системах*.

Самостоятельная работа является исключительно важным элементом в деле эффективного усвоения учебного материала. В процессе самостоятельной работы наиболее четко возникает необходимость целостного, системного восприятия содержания дисциплины, потребность привлечения дополнительных сведений из рекомендованной учебной и методической литературы, просмотра и изучения записей, сделанных во время аудиторных занятий.

Контроль выполнения самостоятельной работы

Результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем. Эти результаты учитываются в ходе текущей и промежуточной аттестации по дисциплине. При оценке результатов самостоятельной работы учитывается уровень сложности задания.

Методические рекомендации по написанию конспекта и критерии оценивания

Конспект должен начинаться с указания реквизитов источника (фамилии автора, полного наименования работы, места и года издания). Особо значимые места, примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамку, пометками на полях, чтобы акцентировать на них внимание и прочнее запомнить.

Работа выполняется письменно. Озвучиванию подлежат главные положения и выводы работы в виде краткого устного сообщения (3-4 мин.) в рамках теоретических и практических занятий. Контроль проводится и в виде проверки конспектов преподавателем.

Критерии оценивания конспекта

- содержательность конспекта, соответствие плану – 3 балла;
- отражение основных положений, результатов работы автора, выводов – 5 баллов;
ясность, лаконичность изложения мыслей студента – 3 балла;
- наличие схем, графическое выделение особо значимой информации – 1 балл;
- соответствие оформления требованиям – 1 балл;
- грамотность изложения – 1 балл;
- своевременная сдача конспекта – 1 балл.

Максимальное количество баллов: 15.

14-15 баллов соответствует оценке «5»

11-13 баллов – «4»

8-10 баллов – «3»

менее 8 баллов – «2»

Самостоятельная работа по теме:

Общие понятия и подходы к математическому моделированию

Цель работы: самостоятельное изучение темы и составление конспекта по теме: «Отладка вычислительной программы».

Методические указания

Все ошибки, возникающие в процессе подготовки и решения задачи, можно свести к следующим: ошибки в алгоритме; ошибки программирования; ошибки при подготовке информации; ошибки ЭВМ.

Ошибки в алгоритме могут быть как следствием неточности математического описания задачи, так и следствием неправильно выбранного численного метода. Типичной ситуацией при наличии таких ошибок является колебательность или расходимость итерационного вычислительного процесса, когда решение либо принципиально не может быть получено данным методом, либо не может быть обеспечена требуемая точность. Ошибки в алгоритме выявляются либо после получения результата, либо непосредственно в процессе счета, когда ЭВМ не выходит на окончание расчетов вследствие «зацикливания» в некоторых частях программы. Для выявления такого рода ошибок осуществляется контроль по физическому смыслу получаемых результатов, либо производится пересчет с меньшим шагом.

Ошибки программирования обусловлены тем, что алгоритм решения не правильно записан на соответствующем языке. Нарушения синтаксиса языка выявляются на этапе трансляции, и информация о них выдается в виде диагностических сообщений. Определенные трудности возникают в больших программах при допущении механических ошибок, т.е. пропуске символов, замене операций, неправильной расстановке скобок и т.п. Такие ошибки не воспринимаются как синтаксические, но они приводят к неверному результату. Чтобы этого избежать, следует сокращать длину сложных выражений, используя процедуру разбиения их на ряд более простых; в строке записывать один оператор, чаще применять комментарии.

Самостоятельная работа по теме:

Методы анализа простых математических моделей

Цель работы: самостоятельное изучение темы и составление конспекта по теме: «Численные дифференцирования», «Численные интегрирования», «Вычисление определённых интегралов», «Приближённое интегрирование».

Методические указания

В ряде случаев анализа различных задач теплотехники возникает необходимость решения нелинейных уравнений вида

$$F(x) p_1 p_2$$

где $F(x)$ – некоторая непрерывная функция, p_1, p_2 , - параметры. Разработано несколько приближенных алгоритмов решения такого типа уравнений, которые относятся к итерационным.

В методе простой итерации исходное уравнение приводится к виду

$$(x, p_1, p_2, \dots) \quad x = f(x, p_1, p_2)$$

Вначале графически или подбором находится нулевое (грубое) значение корня $x = c_0$, а затем оно уточняется путем последовательного вычисления

$$(x, p_1, p_2, \dots), (x_1, p_1, p_2, \dots) \quad x_{i+1} = f(x_i, p_1, p_2)$$

до тех пор, пока отличие последующего приближения от предыдущего не превысит заданной погрешности ε ,

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

Описанный процесс сходится в случае, когда

$$|f'(x)| < 1$$

Если это условие не выполняется, то уравнение преобразовывают подходящим образом, например, переходя к обратной функции.

В тех вариантах, когда функция $y = f(x)$ очень громоздкая, процедуру схождения процесса проверяют практически, по критерию.

Итерационный процесс может осуществляться колебательным образом, в течение которого значения x_i приближаются к искомому корню то «сверху», то «снизу».

Представлена блок-схема процесса решения нелинейного уравнения этим методом. Здесь c – начальное приближение корня, а в дальнейшем – результат предыдущей итерации, x – значение корня после каждой итерации. В данном алгоритме предполагается, что итерационный процесс сходится. Если такой уверенности нет, то необходимо ограничить число итераций или ввести промежуточную печать в цикле.

Листинг программы, составленной по прописанному алгоритму, воспроизведен ниже:

```

program itera;
uses crt;
var x,x1,e:real; m,n,i:integer;
function f(x:real):real;
begin f:=5*(1-exp(-x)); end;
procedure iter (var x,e:real;m:integer);
begin for i:=1 to m do begin
x1:=x; x:=f(x); if abs((x-x1)/x1)<e then exit;
if i=m then writeln ('iteratsi use')
end; end;
begin clrscr; repeat write('x,e,m: '); readln(x,e,m);
iter(x,e,m); writeln('x=',x:6:4); until readkey = #27;
end.

```

После трансляции программы необходимо задать: начальное приближение, погрешность нахождения корня и ограничение на количество итераций

При использовании метода хорд необходимо знать отрезок $[a, b]$, на котором функция $F(x, p_1, p_2)$ меняет знак. Для определенности считаем, что $F(a) < 0$,

$F(b) > 0$. Процесс итераций заключается в том, что в качестве приближений к корню уравнения принимаются значения c_0, c_1 точек пересечения её с осью абсцисс. Далее, сравнивая знаки величин $F(b)$ и $F(c_0)$, приходим к выводу, что корень находится в интервале $[c_0, b]$. Отрезок $[a, c_0]$ отбрасываем. Следующая итерация состоит в определении нового приближения c_1 точки пересечения хорды AB_1 с осью абсцисс и т.д. Процесс уточнения продолжается до тех пор, пока значение $F(c)$ не станет по модулю меньше заданного числа ε .

В методе деления отрезка пополам (его еще называют методом *бисекции*, или *дихотомии*), также как и в предыдущем алгоритме, необходимо знать отрезок $[a, b]$, в котором расположено искомое значение корня $x = c$, т.е. $a < c < b$. В качестве начального приближения корня c_0 принимается середина этого отрезка, т.е. $c_0 = (a+b)/2$. Затем исследуется значение функции $F(x)$ на концах отрезков $[a, c_0]$ и $[c_0, b]$, т.е. в точках a, c_0, b . Тот из них, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимают в качестве этого отрезка. Вторая половина отрезка $[a, b]$, на которой знак не меняется, отбрасывается. В качестве первой итерации корня принимается середина нового отрезка и т.д. Таким образом, после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, т.е. после n итераций он сокращается в 2^n раз.

Предположим, что $F(a) < 0, F(b) > 0$. В качестве начального приближения корня принимается $c_0 = (a + b)/2$. Поскольку в рассматриваемом случае $F(c_0) < 0$, то $c_0 < c < b$, и рассматривается только отрезок $[c_0, b]$. Следующее приближение: $c_1 = (c_0 + b)/2$. При этом отрезок $[c_1, b]$ отбрасывается, поскольку $F(c_1) > 0$ и $F(b) > 0$, т.е. $c_0 < c < c_1$. Аналогично находятся другие приближения: $c_2 = (c_0 + c_1)/2$ и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение функции $F(x)$ не станет меньшим по модулю некоторого заданного малого числа. Как видно, алгоритмы метода хорд и метода деления отрезка пополам похожи, однако первый из них в ряде случаев дает более быструю сходимость итерационного процесса. Оба метода очень надежны при нахождении корня, если отрезок смены знаков функции указан верно.

В тех случаях, когда функция $y = f(x, p_1, p_2, \dots)$ достаточно проста, используют алгоритм касательных (метод Ньютона), в соответствии с которым последующая и предыдущая итерации связаны таким образом:

$m_{i+1} = m_i - F(m_i) / F'(m_i)$. Процесс может считаться законченным, если будет удовлетворяться условие. Данный метод из всех итерационных процессов имеет самую высокую скорость сходимости.

Рассмотрим несколько задач, при решении которых будут использоваться описанные выше алгоритмы.

Пример 1. В ходе изучения процессов теплового излучения абсолютно черного тела рассматриваются два предельных случая, вытекающих из закона Планка. При выводе закона смещения Вина рассматривается следующее трансцендентное уравнение относительно безразмерной температуры.

Структура уравнения очень проста, и его решение легко получить “вручную”. В методических целях воспользуемся программой расчета, которая представлена выше.

Поскольку исходное уравнение получено в предположении $u \gg 1$, то в качестве нулевого приближения полагаем $u_0 = 3$. Задаем точность, равную 0,005, а количество возможных циклов – 10. Последующие итерации принимают такие значения: $u_1 = 4,751$, $u_2 = 4,957$, $u_3 = u_4 = 4,965$. Процесс быстро заканчивается, что обусловлено как видом уравнения, так и выбором начального приближения.

Пример 2. Расчет конвективного нагрева (охлаждения) пластины толщиной 2δ осуществляется с использованием решения соответствующей краевой задачи, имеющего вид:

– безразмерные: температура, координата и время (критерий Фурье); α – коэффициент температуропроводности; t_H , t_l – температуры (начальная пластины и окружающей среды).

Коэффициент Ak вычисляется по формуле:

$$A m \sin \cos 2 \sin$$

Входящие параметры m_k являются корнями трансцендентного уравнения $ctg(m) m / Bi, k k$

где $Bi = \alpha \delta / \lambda$ – критерий Био, λ – коэффициент теплопроводности.

При $Fo > 0,3$ в инженерных расчетах используют первый член ряда. Тогда имеет вид:

$$\cos(\Theta) \exp(-\Theta^2 Fo) = A m z - m Fo$$

Теплота, отданная телом за время τ в процессе охлаждения или воспринятая за этот промежуток времени в процессе нагрева, рассчитывается по формуле:

$$(1), (), P P H l Q = - \Theta Q Q = c p V t - t$$

где Q_P – полная теплота, выделяемая (или воспринятая) за время перехода тела в термическое равновесие с окружающей средой.

Значения m_k при различных критериях Bi имеются в таблицах, однако такой способ неудобен при проведении расчетов на ЭВМ по выписанным формулам. Гораздо проще иметь подпрограмму численного решения трансцендентного уравнения.

Самостоятельная работа по теме:

Численные методы решения задач теплообмена

Цель работы: самостоятельное изучение темы и составление конспекта по теме: «Расчёт угловых коэффициентов», «Метод конечных элементов».

Методические указания

Выше мы достаточно подробно познакомились с одним из подходов, широко применяемых при численном решении задач теплообмена. Это так называемый метод сеток, суть которого состоит в том, что исследуемое пространство мысленно представляется как совокупность большого числа элементарных параллелепипедов с весьма малыми сторонами x , y и z , а непрерывный в пространстве и по времени процесс распространения теплоты внутри тела заменя-

ется некоторым скачкообразным. При температура внутри элемента считается в течение отрезка времени неизменной, а изменение температуры происходит в момент перехода к следующему отрезку.

Изменение температуры в пространстве также происходит скачками на гранях между соседними элементами. Температуру каждого элемента условно сосредотачивают в центре элементов, и соединяя эти центры прямыми, получают прямоугольные сетки в проекции на соответствующие координатные плоскости. Для поиска решения в дифференциальных уравнениях, описывающих процесс, элементарно малые приращения dx , dy , dz , dT и d , а также заменяют выбранными конечными приращениями x , y и т.д., тем самым превращая дифференциальные уравнения в алгебраические, для решения которых известны регулярные общие методы.

Однако при таком подходе определенные трудности возникают при описании граничных условий, а также с проблемой сходимости, устойчивости и аппроксимируемости результатов численного решения.

Действительно, при неудачном выборе размеров x , y , z результаты расчетов могут совершеной отрезка времени не соответствовать действительному распределению температуры в теле или при уменьшении названных величин результаты расчетов начинают то приближаться, то отдаляться от действительного решения. Конечно же, разработаны отдельные рекомендации, обеспечивающие получение правильных результатов, но и при этом остаются определенные, а иногда и непреодолимые трудности при реализации названного подхода.

В настоящее время очень широкое применение находят вариационные методы решения задач, суть которых заключается в том, что решается задача минимизации некоторого специально разработанного функционала $I[f(x)]$. В качестве такого функционала обычно выступает величина определенного интеграла, где подынтегральной функцией является искомая зависимость $f(x)$. В отличие от функции, дающей непрерывное множество значений, функционал отличается тем, что результат определения функционала всегда только одно число. Величина этого числа зависит от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования. Именно это свойство функционала и позволяет использовать его в качестве критерия оптимизации, например.

В какой-то мере подход на основе вариационного метода мы встречали при описании метода релаксаций, используемого для решения задач стационарной теплопроводности. Там для некоторой плоской фигуры записывалось известное дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности, после чего тело было разбито на прямоугольники со сторонами x и y , и для некоторого центрального узла с координатами i и j был получен алгебраический аналог дифференциального уравнения в виде следующего соотношения между температурами выделенной точки и температурами в соседних с ней узлах (при $x = y$):

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0.$$

Далее для каждого узла сетки задавали приближенные значения температур T , при этом, конечно же, приведенное равенство не соблюдалось, поэтому для каждого узла находились величины остатков

$$R_{i,j} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j},$$

а затем специальным алгоритмом минимизировались величины $R_{i,j}$.

Если просуммировать все $R_{i,j}$, то полученная сумма может быть принята за функционал I , и тогда можно будет решать задачу определения минимума обычным образом, т.е. записывая и решая уравнения поскольку это позволяет определить экстремальное (в нашем случае $\min$) значение суммы остатков и тем самым найти искомые температуры $T_{i,j}$.

Главным преимуществом метода конечных элементов является то, что здесь сняты отдельные ограничения на принципы построения сеток. Это позволяет более точно описывать наружную конфигурацию исследуемых тел, в необходимых местах увеличивая или уменьшая густоту узлов. Упрощается решение нелинейных задач, когда физические свойства тел или граничные условия оказываются зависимыми от координат расположения соответствующих узлов пространственной сетки или от номера временного интервала. Проще решаются и вопросы устойчивости и сходимости решений.

Чтобы разобраться с основами метода конечных элементов, рассмотрим задачу о стационарном температурном поле в тонкой пластине сложной геометрической формы при наличии внутренних источников теплоты и граничных условиях третьего рода. Поверхность пластины обозначена через D , а длина по контуру – L . Изменением температуры по толщине пластины пренебрегаем, считая температурное поле двумерным.

Дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии постоянно действующих внутренних источников тепла производительностью qv запишется в виде трех слагаемых (через T обозначена избыточная температура: $T = t - t_{окр}$), а граничные условия третьего рода описываются известным дифференциальным уравнением, отражающим закон Ньютона–Рихмана.

Величина qv может быть функцией от координат x и y . Задача формулируется как обычно: необходимо найти такую функцию $T = f(x, y)$, которая будет наилучшим образом удовлетворять приведенным дифференциальным уравнениям в любой точке, при любых x и y , принадлежащих плоскости D .

Опуская пока технологию получения подынтегральных выражений (в принципе она аналогична описанной нами выше), запишем функционал, минимизация которого и позволит решить поставленную задачу. Чтобы решить задачу численным способом, пластину разбивают на множество элементов простой геометрической формы. Чаще всего это треугольные симплекс-элементы, хотя в качестве таких элементов могут выступать четырехугольники (необязательно прямоугольные) и фигуры более сложной формы. Выработаны некоторые рекомендации для того, чтобы на самых первых этапах способствовать упрощению и облегчению будущего решения. В частности желательно, чтобы при разбивке поверхности D треугольные симплек-элементы были близки по форме к равносторонним треугольникам. В произвольном порядке пронумеруем все элементы от 1 до N . При этом мы получили M узловых точек ($M = N + 2$).

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Голдаев С.В., Ляликов Б.А. Основы математического моделирования в теплотехнике, 1999 г.
2. Ляшков В.И. Математическое моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики, 2012 г.
3. Резников М.И., Липов Ю.М. Математическое моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики, –1-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 258с., ил.
4. Галкин В.И., Куликов В.Е. Математическое моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики, – 4-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1983 –288с., ил.

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка	3
Контроль выполнения самостоятельной работы	3
Методические рекомендации по написанию конспекта и критерии оценивания	3
Самостоятельная работа по теме: Общие понятия и подходы к математическому моделированию	4
Самостоятельная работа по теме: Методы анализа простых математических моделей	4
Самостоятельная работа по теме: Численные методы решения задач теплообмена	7
Информационное обеспечение	10